



UNIVERSITY OF NIŠ
The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS
Series: **Mechanics, Automatic Control and Robotics** Vol.2, No 9, 1999 pp. 939 - 952
Editor of series: Katica (Stevanovi) Hedrih, e-mail: katica@masfak.masfak.ni.ac.yu
Address: Univerzitetski trg 2, 18000 Niš, YU, Tel: +381 18 547-095, Fax: +381 18 547-950
http:// ni.ac.yu/Facta

CALCUL APPROCHE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE DANS UN DIFFUSEUR CONIQUE

UDC 532.2 532.517.4

E. Sharifi, R. Ašković

Laboratoire de Mécanique et Energétique - E.N.S.I.M.E.V. Université de Valenciennes
France, Le Mont Houy, B.P. 311, 59304 Valenciennes, France
e-mail: ebrahimsharifi@voila.fr

Résumé. On propose dans ce travail une méthode approchée pratique de traiter la couche limite turbulente à symétrie de révolution, basée sur une variante de la théorie phénoménologique semi-empirique développée récemment dans le cas plan analogue. En effet, la méthode est fondée sur une analogie avec les lois rhéologiques de puissance utilisées dans l'étude des écoulements des liquides non-newtoniens de viscosité non linéaire. Les résultats obtenus, en appliquant cette méthode simple "à une seule couche", pour calculer les caractéristiques les plus importantes de la couche limite turbulente dans un diffuseur conique, sont satisfaisants.

Abstract. Analysis is made of the axisymmetrical turbulent boundary layer in the sense of the well known phenomenologic semi-empiric boundary layer theory, based on an analogy with the rheologic power laws widely used in the study of non linear viscous flows. A simple one layer method to calculate the turbulent boundary layer on bodies of revolution is first derived; it is then tested on an axisymmetrical conic diffuser.

1. INTRODUCTION

Depuis quelques temps il existe [4] une nouvelle variante de la théorie phénoménologique sémi-empirique de la couche limite turbulente plane, fondée sur une analogie avec des lois rhéologiques de puissance largement utilisées dans l'étude des écoulements de liquides non-newtoniens à viscosité non linéaire et en utilisant le modèle de turbulence de Karman. Il est à souligner qu'on y néglige aussi bien la sous-couche visqueuse que celle située au-dessus de la zone où on utilise habituellement la loi universelle logarithmique. On a également montré [4] que par l'intermédiaire de juste

Received November 20, 1996

This work was supported in part by the National Science Foundation under project No.11E08PT1

deux constantes empiriques: $n = 2/3$ et $k_n = 0,55$ par exemple, cette nouvelle variante de la théorie phénoménologique de la couche limite turbulente plane a permis de recalculer et de confirmer toutes les 33 couches limites turbulentes, choisies comme étalon pour la Conférence de Stanford 1968 [5].

A noter encore que nous avons élargi récemment [1] cette théorie phénoménologique plane de Novozilov au cas de la couche limite turbulente a symétrie de révolution, ainsi que développé ensuite une méthode approchée pratique [2] de calcul de la couche limite turbulente plane en utilisant le modèle de turbulence de Prandtl. C'est donc cette dernière méthode qui sera adaptée, par la suite, afin de traiter la couche limite turbulente a symétrie de révolution dans un diffuseur conique entre autre.

2. EQUATION DE BASE

Les équations de la couche limite turbulente à symétrie de révolution sont [6]:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= u_e u_e' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \\ \frac{\partial(r\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

où (x, y) sont coordonnées curvilignes orthogonales (x , une coordonnée mesurée le long de la surface du corps à symétrie de révolution; y , une coordonnée normale par rapport à la surface du corps); (\bar{u}, \bar{v}) , composantes de la vitesse moyenne en (x, y) ; $u_e(x)$, vitesse extérieure; $r(x)$, le rayon de section droite du corps à symétrie de révolution;

$\tau_t = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u' v'} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \tau$, la contrainte de cisaillement globale,

Si l'on néglige la partie visqueuse de la contrainte globale, le système d'équations (1) se réduit à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - u_e u_e' \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}, \\ \frac{\partial(r\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(r\bar{v})}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

où d'après la loi rhéologique de puissance et le modèle de turbulence de *Prandtl* choisi ici, on a que:

$$\frac{1}{\rho} \tau = \nu k_n T^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$T = \frac{y^2}{\nu} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2. \quad (4)$$

Le système d'équations (2) doit être résolu pour les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad y = 0, \\ \bar{u} = u_e(x), \quad \tau = 0 \quad \text{pour} \quad y = \delta(x), \end{aligned} \quad (5)$$

ainsi que la condition initiale suivante:

$$\bar{u} = u_0(y), \quad \text{pour} \quad x = x_0, \quad (6)$$

où $\delta(x)$ est l'épaisseur de la couche limite.

Pour fermer le système d'équations, on utilise le plus souvent une relation intégrale obtenue du système d'équation (2), dite équation de perte de quantité de mouvement:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{u_e'}{u_e} \delta_2 (2 + H) + \frac{r'}{r} \delta_2 = \frac{1}{2} c_f, \quad (7)$$

$$\delta_1(x) = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad \delta_2(x) = \int_0^{\delta} \frac{\bar{u}}{u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) dy, \quad (8)$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\rho u_e^2} = \frac{1}{2} c_f, \quad H(x) = \frac{\delta_1}{\delta_2}. \quad (9)$$

Enfin, si l'on élimine du système d'équations (2) l'inconnue \bar{v} :

$$\bar{v} = -\int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy - \frac{r'}{r} \int_0^y \bar{u} dy,$$

on aura alors:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} = -u_e u_e' + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy - \frac{r'}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \bar{u} dy. \quad (10)$$

La méthode approchée pratique, proposée ici, est dans un certain sens une méthode des approximations successives qui consiste, en effet, à négliger au départ dans l'équation (10) le terme en « r'/r », mais à en tenir compte, après avoir ainsi calculé \bar{u} , en utilisant l'équation intégrale complète (7).

L'équation (10) se réduit ainsi à:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} \approx -u_e u_e' + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dy. \quad (11)$$

3.1. Couche limite équilibrée. Equation de Falkner-Skan généralisée

Soit la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite:

$$u_e(x) = C(x - x_0)^m, \quad (12)$$

où: C , x_0 et m sont des constantes.

Si l'on introduit les coordonnées adimensionnelles:

$$\bar{x} = \frac{U_0 \cdot x}{v}, \quad \bar{y} = \frac{U_0 \cdot y}{v} \quad (13)$$

alors la constante U_0 (ayant dimension d'une vitesse) peut être déterminée par la relation:

$$u_e(x) = C(x - x_0)^m = U_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^m, \quad (14)$$

où:

$$\bar{x}_0 = \frac{U_0 \cdot x_0}{v}. \quad (15)$$

Ainsi, de (13) et (14), on aura:

$$U_0 = v^{1+m} C^{1/m}. \quad (16)$$

Si l'on cherche la solution de l'équation (11) sous la forme suivante:

$$\bar{u} = U_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^{\alpha-\beta} F'(\eta), \quad (17)$$

où:

$$\eta = \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - \bar{x}_0)^\beta}, \quad (18)$$

α et β étant des constantes dont les valeurs seront déterminées par la suite, alors en rapportant (3), (4), (14) et (17) dans l'équation (11), après des transformations possibles, on aura:

$$k_n (\bar{x} - \bar{x}_0)^{\alpha(1+n)-3\beta} \cdot (t^n F'')' = (\bar{x} - \bar{x}_0)^{2(\alpha-\beta)-1} [(\alpha-\beta)F'^2 - \alpha FF''] - m(\bar{x} - \bar{x}_0)^{2m-1}. \quad (19)$$

Il est évident que les conditions pour séparer les variables \bar{x} et η dans (19) soient:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= m, \\ \alpha(1+n) - 3\beta &= 2m - 1, \end{aligned} \quad (20)$$

d'où on exprime les constantes α et β par les données n et m :

$$\alpha = \frac{1+m}{2-n}, \quad \beta = \frac{1+m}{2-n} - m. \quad (21)$$

Pour ces valeurs α et β , l'équation (19) se réduit à une équation différentielle ordinaire:

$$k_n (t^n F'')' = -\frac{1+m}{2-n} FF'' - m(1-F'^2) \quad (22)$$

où:

$$t = \eta^2 F'',$$

laquelle doit être résolue pour les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} F = F' = 0, \quad F'' \rightarrow \infty, \quad \text{pour } \eta = 0, \\ F' = 1, \quad t^n F'' = 0, \quad \text{pour } \eta = \eta_0 = \text{constante}, \end{aligned} \quad (23)$$

obtenues en remplaçant (3), (4) et (17) dans (5).

A noter que pour $n = 0$ et $k_n = 1$, l'équation (22) devient l'équation bien connue de Falkner-Skan dans le cas de la couche limite laminaire. On vérifie facilement que, pour $n = 0$ et $k_n = 1$, les relations (3) et (4) se ramènent à la loi rhéologique linéaire laminaire newtonienne:

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

En intégrant l'équation (22) entre $n = 0$ et $\eta = \eta_0$, on aura l'équation algébrique suivante:

$$c = \left(\frac{1+m}{2-n} + m \right) \eta^{**} + m \eta^* \quad (24)$$

où: c , η^* et η^{**} sont les coefficients dépendant de m et n

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{u_e \delta_1}{\nu} = \eta^* (\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \\ R^{**} &= \frac{u_e \delta_2}{\nu} = \eta^{**} (\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \\ \bar{\tau}_0 &= \frac{\tau_0}{\rho \cdot u_e} = \frac{1}{2} c_f = c (\bar{x} - \bar{x}_0)^{-\frac{1-n}{2-n}(1+m)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Ces expressions doivent encore être complétées par la relation:

$$R_\delta = \frac{u_e \cdot \delta}{\nu} = \eta_0 (\bar{x} - \bar{x}_0)^{\frac{1+m}{2-n}}, \quad (26)$$

qui détermine l'épaisseur δ de la couche limite.

L'équation différentielle (22) a été résolue numériquement pour les différentes paires de valeurs n et k_n . Pour le calcul des couches limites turbulentes avec gradients de pression, ont le plus grand intérêt, d'après l'expérience dans le cas analogue plan:

$$n = 2/3, \quad k_n = 0.55$$

$$n = 3/4, \quad k_n = 0.53$$

A noter encore qu'il existe des tableaux de valeurs numériques des coefficients c , η^* , η^{**} , η_0 , dans les formules (25) et (26), correspondant aux différentes paires de valeurs n et k_n et aux différentes valeurs de m .

3.2 Une méthode approchée pratique de calcul de la couche limite turbulente à symétrie de révolution pour $u_e(x)$ quelconque

On introduit, tout d'abord, un paramètre dimensionnel:

$$g(x) = \frac{\mathbf{v}}{u_e^2} u_e' \quad (27)$$

Si l'on revient, pour l'instant, au cas de la couche limite équilibrée, étudiée ci-avant au (§3.1), où on a eu d'après (14) et (15):

$$u_e(x) = C(x - x_0)^m = U_0(\bar{x} - \bar{x}_0)^m, \quad \bar{x}_0 = \frac{U_0 \cdot x_0}{\mathbf{v}},$$

alors il est facile, en appliquant (27), de trouver que:

$$g(x) = m(\bar{x} - \bar{x}_0)^{-(1+m)}, \quad (28)$$

ainsi que, tenant compte de (25):

$$\begin{aligned} R^* &= \eta^* \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1}{2-n}}, \\ R^{**} &= \eta^{**} \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1}{2-n}}, \\ c_f &= 2C \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1-n}{2-n}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Si l'on introduit maintenant, pareillement au cas plan classique [3], une grandeur adimensionnelle suivante:

$$Q = g(R^{**})^{2-n}, \quad (30)$$

alors, tenant compte des relations (28) et (29), on ramène (20) à:

$$Q = g(R^{**})^{2-n} = g \left[\eta^{**} \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1}{2-n}} \right]^{2-n} = m(\eta^{**})^{2-n}, \quad (31)$$

d'où $\eta^{**} = (Q/m)^{1/(2-n)}$ donc η^{**} est une fonction juste de Q .

Il est commode ensuite, de constater que les deux grandeurs suivantes ne sont fonction que de Q :

$$c_f (R^{**})^{1-n} = 2C \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1-n}{2-n}} \left[\eta^{**} \left(\frac{m}{g} \right)^{\frac{1}{2-n}} \right]^{1-n} = 2C(\eta^{**})^{1-n} = G(Q) \quad (32)$$

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\eta^{**}}{\eta^*} = H(Q).$$

Les deux relations précédentes (32) ne sont valables, très exactement, que pour des couches limites dites équilibrées, discutées au § 3.1, mais on va accepter qu'elles restent approximativement valables aussi bien dans un cas plus général où $u_e(x)$ est une fonction

arbitraire. A noter que dans le cas du modèle de turbulence de Karman, la même hypothèse s'est justifiée très bien [5].

Dans ce cas, les paramètres δ_2 , c_f et H seront exprimés donc par deux grandeurs: un paramètre $g(x)$, donné en (27), et un autre paramètre inconnu $Q(x)$. Or l'équation différentielle pour déterminer le paramètre Q peut être obtenue en remplaçant les expressions (32) dans l'équation intégrale de perte de quantité de mouvement (7), transformée préalablement sous la forme suivante:

$$\frac{1}{2-n} \frac{d}{dx} (R^{**})^{2-n} + (1+H) \frac{u_e g}{\nu} (R^{**})^{2-n} = \frac{1}{2} \frac{u_e c_f}{\nu} (R^{**})^{1-n}. \quad (33)$$

Il s'ensuit donc l'équation différentielle pour calculer le paramètre $Q(x)$, tenant compte de la forme arbitraire de la fonction $u_e(x)$:

$$\frac{dQ}{dx} + E(Q) \frac{u_e'}{u_e} = \frac{u_e''}{u_e} Q + (n-2) \frac{r'}{r} Q, \quad (34)$$

où:

$$E(Q) = (2-n)[(1+H(Q))Q - \frac{1}{2}G(Q)] + 2Q. \quad (35)$$

Il est à remarquer que la fonction $E(Q)$ dépend de n , non seulement explicitement, mais aussi par l'intermédiaire des fonctions $G(Q)$ et $H(Q)$, dont les formes dépendent de n et peuvent être calculées à l'aide des tableaux numériques pour les couches limites équilibrées [2].

Dans ce sens, on peut constater que pour toute valeur particulière de n , on aura sa "propre équation" (34) et sa "propre formule" (35)

Comme de nombreux calculs des couches limites turbulentes planes, expérimentalement vérifiées, l'ont démontré [4], dans le cas du modèle de turbulence de Karman, le meilleur accord avec les résultats expérimentaux a été obtenu dans le cas où $n = 2/3$ et $k_n = 0.55$.

C'est pourquoi donc, juste pour pouvoir comparer nos résultats, nous allons considérer, par la suite, le même cas. Or, dans ce cas particulier ($n = 2/3$ et $k_n = 0.55$) et pour le modèle de turbulence de Prandtl [3], nous avons effectué les tableaux détaillés des fonctions $G(Q)$, $E(Q)$ et $H(Q)$, ainsi que les courbes correspondantes [2], d'où les expressions analytiques approchées suivantes:

$$\begin{aligned} G(Q) &= +0.0938 + 2.1143Q + 36.1035Q^2 + 984.7348Q^3, \\ E(Q) &= -0.063 + 4.097Q - 23.163Q^2, \\ H(Q) &= 1.6529 - 2.17Q. \end{aligned} \quad (36)$$

Ainsi, en rapportant donc (36) dans (34), , pour un calcul approché de la couche limite turbulente à symétrie de révolution, dans le cas $n = 2/3$ on aura une équation différentielle de type de Riccati:

$$\frac{dQ}{dx} + (-0.063 + 4.097Q - 23.163Q^2) \frac{u_e'}{u_e} = \left(\frac{u_e''}{u_e} - \frac{4}{3} \frac{r'}{r} \right) Q. \quad (37)$$

Néanmoins, cette équation n'est pas toujours très commode pour le calcul, à cause de

singularité au passage de la fonction u_e' par zéro. De plus, dans l'équation (37) on a aussi u_e'' dont la détermination exige une double dérivation de la courbe expérimentale $u_e(x)$, d'où proviennent très souvent des erreurs importantes.

Pour éviter tout cela, il faut changer la fonction inconnue dans l'équation (37) la nouvelle fonction inconnue étant, en effet, égale à:

$$z = \frac{Q}{g}, \quad (38)$$

$$z = (R^{**})^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{u_e \delta_2}{\nu} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (39)$$

Avec la nouvelle fonction inconnue $z(x)$, l'équation (37) se ramène à une autre équation du type Riccati:

$$\frac{dz}{dx} - 23.163 \frac{\nu}{u_e^3} (u_e')^2 z^2 + \left(2.097 \frac{u_e'}{u_e} + \frac{4}{3} \frac{r'}{r} \right) z = 0.063 \frac{u_e}{\nu}, \quad (40)$$

mais celle-ci étant privée des inconvénients mentionnés, car elle ne contient que la première dérivée de $u_e(x)$, juste au numérateur. C'est pourquoi dans la pratique l'équation (40) est beaucoup plus commode pour intégration que l'équation (37).

Par conséquent, la méthode approchée pratique pour traiter la couche limite turbulente, à symétrie de révolution, proposée ici, consiste à faire les pas suivants:

– Tout d'abord, pour une distribution de vitesse extérieure $u_e(x)$ donnée, intégrer l'équation différentielle (40), avec la condition initiale de prescription de δ_2 :

$$z = \left(\frac{u_e \delta_2}{\nu} \right)^{\frac{4}{3}} = z_1 \text{ pour } x = x_1. \quad (41)$$

– Après avoir trouvé ainsi $z(x)$, déterminer l'épaisseur de perte de quantité de mouvement par:

$$\delta_2(x) = \frac{\nu}{u_e} z^{\frac{3}{4}}, \quad (42)$$

ainsi que le paramètre $Q(x)$ par (27) et (38), à savoir:

$$Q(x) = g(x)z(x). \quad (43)$$

– Le pas suivant est la détermination des fonctions auxiliaires: $G(Q)$ et $H(Q)$ en utilisant les relations (36).

$$\text{– Les formules } H(x) = H(Q), \quad c_f = z^{-\frac{1}{4}} G(Q), \quad (44)$$

offrent les deux caractéristiques particulièrement importantes de la couche limite turbulente respectivement.

– Enfin, en utilisant l'idée la plus simple bien connue, on peut calculer une approximation améliorée de la vitesse moyenne dans la couche limite par:

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left[\frac{y}{\delta_2} \frac{H-1}{H(H-1)} \right]^{\frac{1}{2}(H-1)}, \tag{45}$$

où les fonctions $\delta_2(x)$ et $H(x)$ ont été déterminées préalablement par les formules(42) et (44).

4. COUCHE LIMITE TURBULENTE DANS LES DIFFUSEURS CONIQUES
EN ÉCOULEMENT PRODUIT PAR UNE SOURCE PONCTUELLE

Dans ce cas, dans le système de coordonnées (x,y) , montré sur la figure (1), on a, e étant le rayon de section d'entrée et θ le demi - angle au sommet du diffuseur:

$$u_e(x) = \frac{U_0 R^2}{(R+x)^2} \tag{46}$$

$$r(x) = (R+x) \sin \theta \tag{47}$$

avec: $U_0 = u_e(x=0)$ et $e = R \sin \theta$

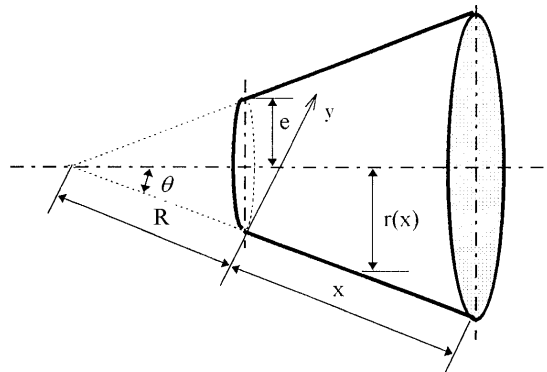


Fig. 1.

En effet, il est préférable d'étudier préalablement le cas plus général:

$$u_e(x) = C(R-x)^m, \tag{48}$$

avec $C = U_0 R^2$ et $m = -2$. En remplaçant (47) et (48) dans (37), on obtiendra:

$$(R+x) \frac{dQ}{dx} = 23.163 m Q^2 - \left(\frac{7}{3} + 3.097m \right) Q + 0.063 m, \tag{49}$$

soit en introduisant une nouvelle variable:

$$\lambda = 23.163 m \ln(R+x), \tag{50}$$

l'équation précédente se ramène à:

$$\frac{dQ}{d\lambda} = Q^2 - \left(0.1337 + \frac{0.10073}{m}\right)Q + 0.00272. \quad (51)$$

Il est facile de démontrer que les solutions de l'équation:

$$Q^2 - \left(0.1337 + \frac{0.10073}{m}\right)Q + 0.00272 = 0 \quad (52)$$

sont imaginaires si:

$$-3.42847 < m < -0.42418. \quad (53)$$

mais réelles pour toutes les autres valeurs de m en dehors de cet intervalle.

Or si les deux solutions réelles de l'équation (52) sont:

$$Q_{1,2} = \frac{1}{2} \left(0.1337 + \frac{0.10073}{m}\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{0.00699 + \frac{0.02693}{m} + \frac{0.01015}{m^2}}, \quad (54)$$

alors dans ce cas l'équation différentielle (51) peut être transformée en:

$$\frac{1}{Q_1 - Q_2} \left(\frac{dQ}{Q - Q_1} - \frac{dQ}{Q - Q_2} \right) = d\lambda$$

dont la solution générale est la suivante:

$$\ln \left(\frac{Q - Q_1}{Q - Q_2} \right) = (Q_1 - Q_2)(\lambda + \lambda_0),$$

ou en choisissant la constante d'intégration sous une forme plus commode:

$$\lambda_0 = -23.163 m \ln C_0, \quad (55)$$

il s'ensuit, tenant compte de (50):

$$\frac{Q - Q_1}{Q - Q_2} = \left(\frac{R + x}{C_0} \right)^{23.163m(Q_1 - Q_2)}. \quad (56)$$

D'où, enfin, pour m hors de l'intervalle (53):

$$Q(x) = \frac{Q_1 - qQ_2}{1 - q}, \quad (57)$$

avec une abréviation

$$q = \left(\frac{R + x}{C_0} \right)^{23.163m(Q_1 - Q_2)}, \quad (58)$$

où la constante d'intégration C_0 , ayant évidemment une unité de longueur, sera déterminée à l'aide de la condition initiale (41).

Pour des valeurs de l'exposant m situées dans l'intervalle (53), la solution générale de l'équation différentielle (51) est la suivante:

$$\frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{1}{p} \left(Q - \frac{0.050365}{m} - 0.06685 \right) = \lambda + \lambda_0,$$

d'où la nouvelle fonction présentant le paramètre $Q(x)$, compte tenu de (55):

$$Q(x) = 0.06685 + \frac{0.05036}{m} + p \operatorname{tg} \left[23.163mp \operatorname{lg} \left(\frac{R+x}{C_0} \right) \right], \quad (59)$$

$$p = \sqrt{-0.001747 - \frac{0.006732}{m} - \frac{0.002537}{m^2}}, \quad (60)$$

Dans le cas d'un diffuseur conique à symétrie de révolution, considéré ici, en comparant (46) et (48), on constate que $m = -2$ ce qui se situe dans l'intervalle (53). Alors, la solution est donnée par (59), en tenant compte que, d'après (60), $p = 0.03138$

$$Q(x) = 0.04167 - 0.03138 \operatorname{tg} \left[1.45371 \ln \left(\frac{R+x}{C_0} \right) \right]. \quad (61)$$

La constante C_0 , sera déterminée à l'aide de la condition initiale (41). Or, puisque selon (27) et (46):

$$g(x) = \frac{2}{R_e} \left(1 + \frac{x}{R} \right), \quad (62)$$

avec: $R_e = U_0 \cdot R / \nu$, donc $g(0) \neq 0$, alors la condition que la couche limite turbulente se développe dès le bord d'attaque du diffuseur: $z(0) = 0$, implique que $Q(0) = 0$, c'est-à-dire, tenant compte de (61):

$$C_0 = 0.52916R.$$

En rapportant cette valeur dans (61), il vient:

$$Q(x) = 0.04167 - 0.03138 \operatorname{tg} \left[1.45371 \ln \left(1 + \frac{x}{R} \right) + 0.92523 \right], \quad (63)$$

ainsi que, d'après (38) et (62):

$$z(x) = \left(0.01569 \operatorname{tg} \left[1.45371 \ln \left(1 + \frac{x}{R} \right) + 0.92523 \right] - 0.02083 \right) \frac{R_e}{\left(1 + \frac{x}{R} \right)}. \quad (64)$$

Après avoir déterminé $z(x)$, on peut calculer maintenant toutes les autres caractéristiques de la couche limite turbulente suivant l'ordre d'opérations énoncé auparavant. Tout d'abord, l'épaisseur de quantité de mouvement (42):

$$\frac{\delta_2}{R} = \frac{1}{R_e} \left(1 + \frac{x}{R} \right)^2 z^{\frac{3}{4}} \quad (65)$$

Puis, en remplaçant (63) dans (44), on trouvera $H(x)$ et $c_f(x)$.

Exemple numérique: Soient deux diffuseurs coniques d'angles aux sommets respectifs:

$\theta_1 = 3.5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$, mais avec le même rayon de section d'entrée: $e_1 = e_2 = 4.36$ cm et le même débit d'entrée: $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 299$ l/s d'une source ponctuelle de fluide de viscosité cinématique $\nu = 1.57 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

Il est facile de calculer préalablement d'autres dimensions nécessaires des deux diffuseurs, ainsi que les vitesses d'écoulement par les segments sphériques d'entrée des hauteurs h_1 et h_2 respectivement (fig. 2.):

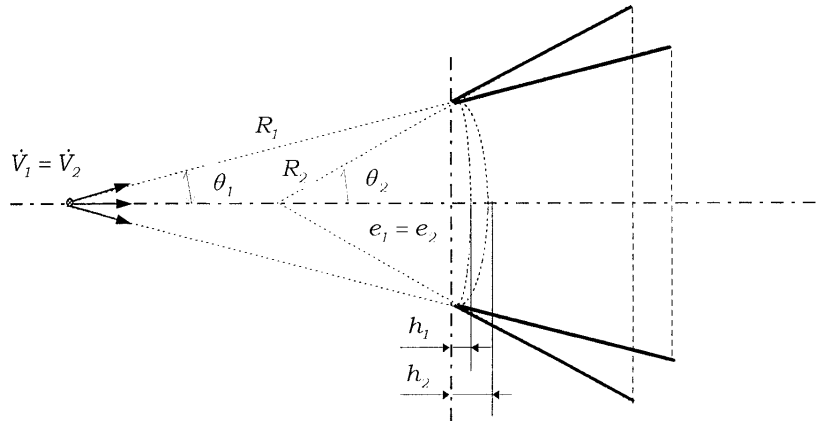


Fig. 2.

$$R_1 = \frac{e_1}{\sin \theta_1} = \frac{4.36}{\sin 3.5} = 71.42 \text{ cm}; \quad R_2 = \frac{e_2}{\sin \theta_2} = \frac{4.36}{\sin 5} = 50 \text{ cm};$$

$$h_1 = R_1(1 - \cos \theta_1) = 0.13 \text{ cm}; \quad h_2 = R_2(1 - \cos \theta_2) = 0.19 \text{ cm};$$

$$S_1 = 2\pi R_1 h_1 = 0.00598 \text{ m}^2; \quad S_2 = 2\pi R_2 h_2 = 0.00599 \text{ m}^2;$$

$$U_{01} = \frac{\dot{V}_1}{S_1} = 50 \text{ m/s}; \quad U_{02} = \frac{\dot{V}_2}{S_2} = 50 \text{ m/s}.$$

Or, malgré la vitesse initiale approximativement la même dans les deux diffuseurs: $U_{01} \approx U_{02}$, les nombres de Reynolds respectifs sont différents:

$$R_{e1} = \frac{U_{01} R_1}{\nu} = \frac{50 \cdot 0,7142}{1,57 \cdot 10^{-5}} = 2274520, \quad R_{e2} = \frac{U_{02} R_2}{\nu} = \frac{50 \cdot 0,50}{1,57 \cdot 10^{-5}} = 1592350.$$

Les caractéristiques de la couche limite turbulente dans les deux diffuseurs sont maintenant calculées en utilisant les formules ci-avant suivant l'ordre d'opération énoncé au § 3.2 et présentées aux tableaux 1 et 2 et illustrées par la figure 3.

Tableau 1
 $\theta_1 = 3.5^\circ$; $R_1 = 71.45 \text{ cm}$; $R_{e2} = 2274520$

x/R	$Q(x)$	$G(Q)$	$z(x)$	$R^{**} \cdot 10^4$	$H(x)$	$c_f(x)$
0.050	-0.00679	0.01405	7354.281	0.07941	1.668	0.00152
0.100	-0.01482	0.06719	15321.994	0.13772	1.685	0.00604
0.125	-0.01945	0.05910	19661.962	0.16604	1.695	0.00499
0.150	-0.02457	0.04903	24297.807	0.19461	1.706	0.00393
0.175	-0.03031	0.03547	29336.469	0.22416	1.719	0.00271
0.200	-0.03677	0.01591	34847.542	0.25505	1.733	0.00116
0.225	-0.04415	-0.01391	40987.779	0.28806	1.749	-

Tableau 2
 $\theta_2 = 5^\circ$; $R_1 = 50 \text{ cm}$; $R_{e2} = 1592350$

x/R	$Q(x)$	$G(Q)$	$z(x)$	$R^{**} \cdot 10^4$	$H(x)$	$c_f(x)$
0.050	-0.00679	0.01405	5148.598	0.06078	1.668	0.00166
0.100	-0.01482	0.06719	10726.649	0.10540	1.685	0.00660
0.125	-0.01945	0.05910	13764.981	0.12708	1.695	0.00546
0.150	-0.02457	0.04903	17010.452	0.14895	1.706	0.00429
0.175	-0.03031	0.03547	20537.927	0.17156	1.719	0.00296
0.200	-0.03677	0.01591	24396.129	0.19520	1.733	0.00127
0.225	-0.04415	-0.01391	28694.797	0.22047	1.749	-

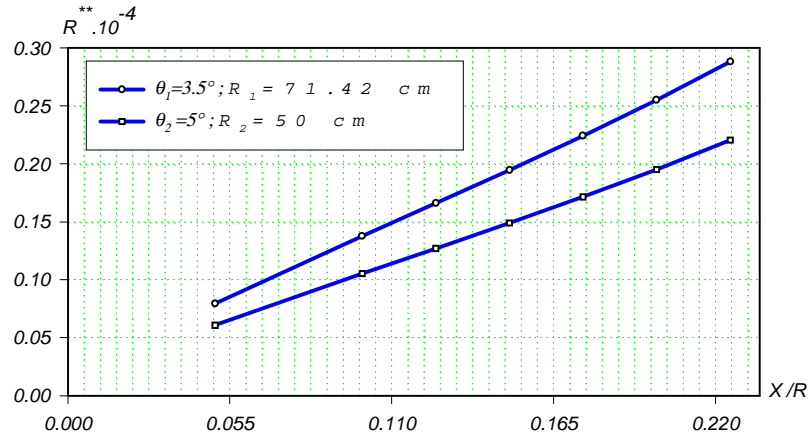


Fig. 3.

5.CONCLUSION

Les premiers résultats, obtenus en utilisant cette méthode approchée, basée sur le modèle de turbulence de Prandtl, semblent être physiquement acceptables [2]. Ainsi le

résultat, donné par les tableaux 1 et 2, pour les diffuseurs coniques à symétrie de révolution du même rayon de la section d'entrée et avec les différents angles aux sommets, que le décollement de la couche limite turbulente apparaît pour la valeur du paramètre $q = -0.04415$, est en assez bon accord avec la valeur expérimentale $Q_{\text{exp}} = -0.065$ (donc un écart de 25% environ) de G. Fraser [5] pour l'id. 5000 (diffuseur conique). D'autre part, les mêmes tableaux montrent que pour un demi-angle au sommet du diffuseur plus élevé ($\theta_2 = 5^\circ$) le point de décollement de la couche limite recule à l'amont ($x = 0.22R_2 = 110$ mm) par rapport à l'abscisse du point de décollement ($x_1 = 0.22R_1 = 157$ mm) dans le cas d'un demi-angle plus faible ($\theta_1 = 3.5^\circ$) ce qui est physiquement logique.

Enfin, comparées aux cas analogues [4], les autres caractéristiques de la couche limite, données par les tableaux 1 et 2, manifestent également un accord qualitatif, ce qui témoigne en faveur de la méthode proposée. Il est à espérer que la même tendance sera conservée dans d'autres cas particuliers des diffuseurs (plan ou axisymétrique) que nous sommes en train [7] d'étudier.

REFERENCES

1. Askovic R.: *Sur une méthode approchée de calcul de la couche limite turbulente à symétrie de révolution*. Transactions of the CSME 18 (1994) 2.111-129.
2. Askovic R.: *Contribution à l'étude de la couche limite turbulente*. RAPPORT N°94/A/01 du Laboratoire de Mécanique des fluides de l'Université de Valenciennes, juin 1994.
3. Buri A.: *Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Stromung*. Diss Zurich, 1931.
4. Novozilov V.V.: *Théorie de la couche limite turbulente plane d'un écoulement incompressible* (monographie en russe), Editions SUDOSTROENIE, Léningrad, 1977
5. Proceedings, *Computation of turbulent boundary layers*, AFOSR-IFP-Stanford Conference, 1968
6. Schlichting H.: *Boundary Layer Theory*, Mc Graw Hill, Book Company, Sixth Edition, 1968.
7. Sharifi T.E.: *Couche limite turbulente dans les diffuseurs*. Thèse de doctorat en cours de réalisation.

PRIBLIŽNI PRORAČUN TURBULENTNOG GRANIČNOG SLOJA U KONIČNOM DIFUZORU

E. Sharifi, R. Ašković

U radu se, najpre, predlaže jedna približna metoda za proračun osnosimetričnog turbulentnog graničnog sloja, u smislu poznate fenomenološke poluempirijske teorije turbulentnog strujanja zasnovane na analogiji sa strujanjima nenjutnovskih tečnosti nelinearnih stepenih zakona viskoznosti i koristeći Prandtl-ov model turbulencije. Potom je metoda testirana na primeru koničnog difuzora, uključujući i problem određivanja tačke odvajanja turbulentnog graničnog sloja, sa zadovoljavajućim rezultatima.